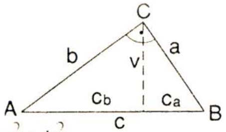
Výpočet geometrických obrazců

GEOMETRIE

Pravoúhlý trojúhelník



Pythagorova věta : $c^2 = a^2 + b^2$

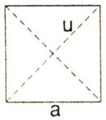
Euklidova věta o odvěsně : $a^2 = c \cdot c_a$

Euklidova věta o výšce : $v^2 = c_a \cdot c_b$

Obvody a obsahy

obvod označujeme písmenem o, obsah písmenem S. Označení prvků jednotlivých geometrických útvarů je zřejmé z připojených nákresů.

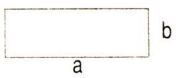
Čtverec:



$o = 4a \quad S = a^2 \quad S = \frac{1}{2}u^2$

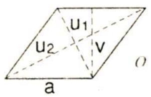
$u = a\sqrt{2} \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot u$

Obdélník :



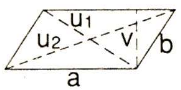
$o = 2(a+b) \quad S = ab$

Kosočtverec :



$o = 4a \quad S = av \quad S = \frac{1}{2} u_1 u_2$

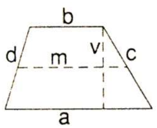
Rovnoběžník :



$o = 2(a+b) \quad S = av$

$u_1^2 + u_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

Lichoběžník :

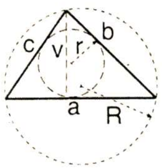


$o = a + b + c + d$

$S = \frac{1}{2}(a+b)v$

$m = \frac{1}{2}(a+b) \quad S = mv$

Trojúhelník :



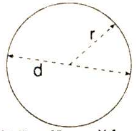
$o = a + b + c$

$S = \frac{1}{2}av \quad S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

$S = \frac{abc}{4R}$

R - poloměr kružnice opsané
r - poloměr kružnice vepsané

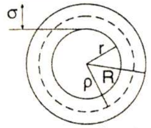
Kružnice, kruh :



$o = 2\pi r \quad o = \pi d \quad o = 2\sqrt{\pi S}$

$S = \pi r^2 \quad S = \frac{\pi d^2}{4} \quad S = \frac{od}{4}$

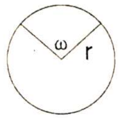
Mezikruží :



$S = \pi(R^2 - r^2) \quad S = 2\pi\rho\sigma$

$\rho = \frac{R+r}{2} \quad \sigma = R - r$

Kruhová výseč :



$S = \frac{\pi r^2 \omega}{360}$

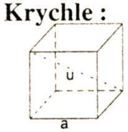
Kruhová úseč :

$S = \frac{\pi r^2 \omega}{360} - \frac{1}{2} r^2 . \sin\omega$

Povrchy a objemy

Povrch označujeme písmenem P, objem písmenem V, obsah podstavy písmenem S, obvod podstavy písmenem o a obsah pláště písmenem Q. Označení prvků jednotlivých geometrických útvarů je zřejmé z připojených nákresů.

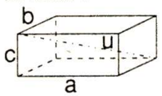
Krychle :



$P = 6a^2 \quad V = a^3$

$u = a\sqrt{3}$

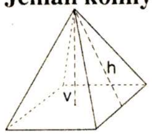
Kvádr :



$P = 2(ab + bc + ca) \quad V = abc$

$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

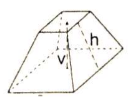
Jehlan kolmý :



$Q = \frac{1}{2}oh \quad V = S \cdot \frac{v}{3}$

$P = S + Q$

Jehlan komolý pravidelný :

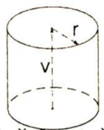


$P = S_1 + S_2 + Q$

$V = \frac{v}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 . S_2})$

S_1, S_2 - *obsahy podstav*

Válec rotační :

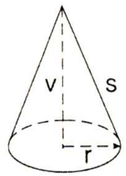


$Q = 2\pi rv$

$P = 2S + Q = 2\pi r(r+v)$

$V = \pi r^2 v$

Kužel rotační :



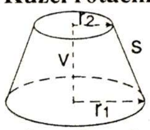
$Q = \pi r s \quad Q = \pi r\sqrt{r^2 + v^2}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

$P = S + Q = \pi r(r+s)$

$s = \sqrt{r^2 + v^2}$

Kužel rotační komolý :

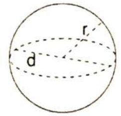


$Q = \pi s(r_1 + r_2)$

$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$P = S_1 + S_2 + Q = \pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$

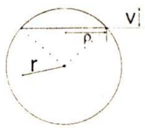
Koule :



$P = 4\pi r^2 \quad P = \pi d^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad V = \frac{1}{6}\pi d^3$

Kulová úseč :



$V = \frac{1}{6}\pi v(3\rho^2 + v^2)$

$Q = 2\pi rv$ (kulový vrchlík)

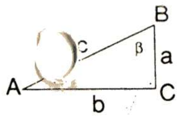
$P = 2\pi rv + \pi\rho^2$

Některé hodnoty goniometrických funkcí

α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$	π $180°$	$\frac{3\pi}{2}$ $270°$	2π $360°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
cotg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

TRIGONOMETRIE

Pravoúhlý trojúhelník:



Goniometrické funkce

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad tg\alpha = \frac{a}{b} \quad cotg\alpha = \frac{b}{a}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha \qquad \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = cotg\alpha \qquad \sin\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq k\pi$

Goniometrické vztahy

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad tg\alpha . cotg\alpha = 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha . \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha . \cos\beta \pm \cos\alpha . \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha . \cos\beta \mp \sin\alpha . \sin\beta$

$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha . tg\beta}$

$cotg(\alpha \pm \beta) = \frac{cotg\alpha . cotg\beta \mp 1}{cotg\alpha \pm cotg\beta}$

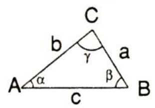
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} . \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} . \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} . \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} . \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Libovolný trojúhelník :



Sinová věta :

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Kosinová věta :

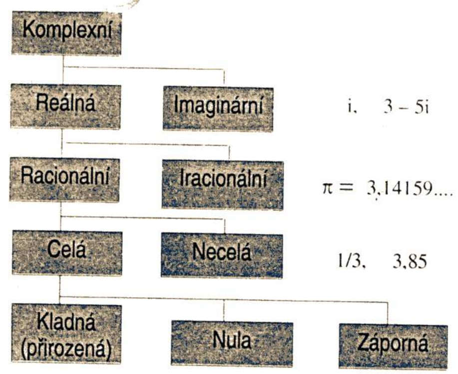
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos\gamma$

Autor © RNDr. Rostislav Nebola, 1993 vydalo MC nakladatelství,Moldavská 11, 625 00 Brno, sazba DAMIRO, Aneneská 9, 602 00 Brno. Tisk Protis s.r.o. Podolí u Brna, 2.opravené vydání.

ČÍSLA



ZLOMKY

$\frac{a}{b}$ a-čitatel, b-jmenovatel $b \neq 0$

Složené zlomky

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}} = \frac{an}{bm}$

Rozšiřování

$\frac{a}{b} = \frac{a.m}{b.m}$ $m \neq 0$

Krácení

$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ $m \neq 0$

Násobení

$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$

Dělení

$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$

Sčítání (odečítání)

se stejnými jmenovateli

$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$

s různými jmenovateli

$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} \pm \frac{bm}{mn} = \frac{an \pm bm}{mn}$

TROJČLENKA

$\uparrow$ a . . . . . b $\uparrow$
c x

$\frac{c}{a} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \frac{c}{a}$

(přímá úměrnost)

a . . . . . b $\uparrow$
$\downarrow$ c x

$\frac{a}{c} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \frac{a}{c}$

(nepřímá úměrnost)

PROCENTO

$1\% = \frac{1}{100}$ celku

Základ z - velikost celku
Procentová část celku $č$ - část základu
Počet procent p - počet setin základu v procentové části

$č = \frac{z \cdot p}{100}$ $p = \frac{100 \cdot č}{z}$ $z = \frac{100 \cdot č}{p}$

MNOHOČLENY

$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

$(a^3 + b^3) : (a+b) = a^2 - ab + b^2$

$(a^3 - b^3) : (a-b) = a^2 + ab + b^2$

ROVNICE DRUHÉHO STUPNĚ

neboli rovnice **kvadratická** má tvar $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$, a, b, c jsou reálná čísla). Člen ax^2 se nazývá **kvadratický člen,** bx **lineární člen** a c **absolutní člen.**

Výraz $D = b^2 - 4ac$ se nazývá **diskriminant kvadratické rovnice.** Jestliže
$D > 0$, má rovnice dva různé reálné kořeny,
$D = 0$, má rovnice jeden reálný kořen,
$D < 0$, nemá rovnice v oboru reálných čísel řešení.
Kořeny kvadratické rovnice vypočítáme pomocí vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

POČETNÍ OPERACE S MOCNINAMI

Sčítání (odčítání) mocnin.
Sčítat (odčítat) můžeme jen mocniny se stejným základem a stejným exponentem.

$ra^n + sa^n = (r+s)\,a^n$ $3a^2 + 2a^2 = 5a^2$

Násobení mocnin.
Mocniny se stejným **základem** násobíme, umocníme-li společný základ **součtem** exponentů.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^2 \cdot a^4 = a^6$

Mocniny se stejným **exponentem** znásobíme, umocníme-li **součin** základů společným exponentem.

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $2^3 \cdot a^3 = (2a)^3$

Dělení mocnin.
Mocniny se stejným **základem** dělíme, umocníme-li společný základ **rozdílem** exponentů.

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$ $a^7 : a^5 = a^2$

Mocniny se stejným **exponentem** dělíme, umocníme-li **podíl** základů společným exponentem.

$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ $(b \neq 0)$ $x^2 : y^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

Umocňování mocnin.
Mocninu umocníme, umocníme-li základ mocniny součinem exponentů.

$(a^m)^n = a^{m.n}$ $(a^4)^2 = a^8$

Umocňování součinu.
Součin umocníme, umocníme-li každého činitele daným mocnitelem.

$(ab)^m = a^m \cdot b^m$ $(2a)^3 = 2^3 \cdot a^3 = 8a^3$

Mocniny se záporným exponentem.
Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ a přirozené číslo n platí

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ $a^5 = \frac{1}{a^{-5}}$

Početní operace s odmocninami.
Pro nezáporné reálné číslo a, celé číslo m a přirozené číslo n platí

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$ ($\sqrt[2]{a}$ *označujeme* $\sqrt{a}$)

Podle této věty můžeme převést mocniny na mocniny s exponenty ve tvaru zlomku a s nimi počítat podle pravidel o počítání s mocninami a zlomky

$\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

LOGARITMY

Logaritmus čísla x o základu a je číslo y, kterým musíme umocnit základ a, abychom dostali číslo x.

$a^y = x$ $\log_a x = y$ $(1 \neq a > 0)$

Dekadické logaritmy (log) mají základ $a = 10$

$\log 10^c = c$

$1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$
$10 = 10^1 \Rightarrow \log 10 = 1$
$100 = 10^2 \Rightarrow \log 100 = 2$

$\log ab = \log a + \log b$

$\log 20 = \log 2 \cdot 10 = \log 2 + \log 10 =$
$= 0{,}301 + 1 = 1{,}301$

$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

$\log 0{,}05 = \log 5 \cdot 10^{-2} = \log \frac{5}{10^2} =$
$= \log 5 - \log 10^2 = 0{,}699 - 2 = -1{,}301$

$\log a^r = r \cdot \log a$ $\log \sqrt[r]{a} = \frac{1}{r} \cdot \log a$

Mocniny a odmocniny některých čísel

a	a^2	a^3	$\sqrt{a}$	$\sqrt{10a}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{10a}$
1	1	1	1,000	3,162	1,000	2,154
2	4	8	1,414	4,472	1,260	2,714
3	9	27	1,732	5,477	1,442	3,107
4	16	64	2,000	6,325	1,587	3,420
5	25	125	2,236	7,071	1,710	3,684
6	36	216	2,449	7,746	1,817	3,915
7	49	343	2,646	8,367	1,913	4,121
8	64	512	2,828	8,944	2,000	4,309
9	81	729	3,000	9,487	2,080	4,481
10	100	1000	3,162	10,000	2,154	4,642